BTS – Groupement C – Mathématiques – juin 2011 - Correction

Exercice 1 (11 points)

Partie A Résolution d'une équation différentielle $y''+2y'+y=2$ (E)

1. Résoudre l'équation différentielle : $y''+2y'+y=0$ (E_0)

   L'équation caractéristique associée est : $r^2+2r+1=0$

   ou encore : $(r+1)^2=0$

   On n'a donc qu'une seule solution réelle : $r=-1$

   La solution générale de l'équation (E_0) est donc : $\boxed{y=(\lambda x+\mu)e^{-x}}$ où λ et μ sont 2 constantes réelles quelconques.

2. Déterminer le réel b pour que la fonction constante g définie par $g(x)=b$ soit une solution particulière de (E)

   La fonction g est une solution de (E) si et seulement si $g''+2g'+g=2$

   On a : $g''=g'=0$ car g est une fonction constante.

   Il faut donc que l'on ait : $\boxed{b=2}$

3. En déduire les solutions de l'équation (E)

   Les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant la solution générale de (E_0) et une solution particulière de (E).

   Donc les solutions de (E) sont de la forme : $\boxed{y=(\lambda x+\mu)e^{-x}+2}$

4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie les conditions $f(0)=3$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$.

   La fonction f étant une solution de (E), on peut écrire $f(x)=(\lambda x+\mu)e^{-x}+2$

   Si $f(0)=3$, alors $(0+\mu)e^{0}+2=3$

   donc $\mu+2=3$

   donc $\boxed{\mu=1}$

   On a donc $f(x)=(\lambda x+1)e^{-x}+2$

   Si $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2$, alors $\left(-\frac{\lambda}{2}+1\right)e^{-\frac{1}{2}}+2=2$

   donc $\left(-\frac{\lambda}{2}+1\right)e^{-\frac{1}{2}}=0$

   donc $-\frac{\lambda}{2}+1=0$

   donc $\boxed{\lambda=2}$

   La solution de (E) cherchée est donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{f(x)=(2x+1)e^{-x}+2}$

Partie B : Étude d'une fonction $f(x)=(2x+1)e^{-x}+2$

1. Limite de f en $-\infty$?

   On a : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\end{cases}$ donc, par produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1)e^{-x}=-\infty$

   Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty}$

2. Recherche de la limite de f en $+\infty$.

   a) En écrivant $f(x)=2xe^{-x}+e^{-x}+2$, déterminer la limite de f en $+\infty$.

   D'après le formulaire, on a : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$.

   On en déduit : $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$

   Donc $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(te^{-t}\right)=0$

Donc $\lim_{x\to+\infty}\left(2x\mathrm{e}^{-x}\right)=0$

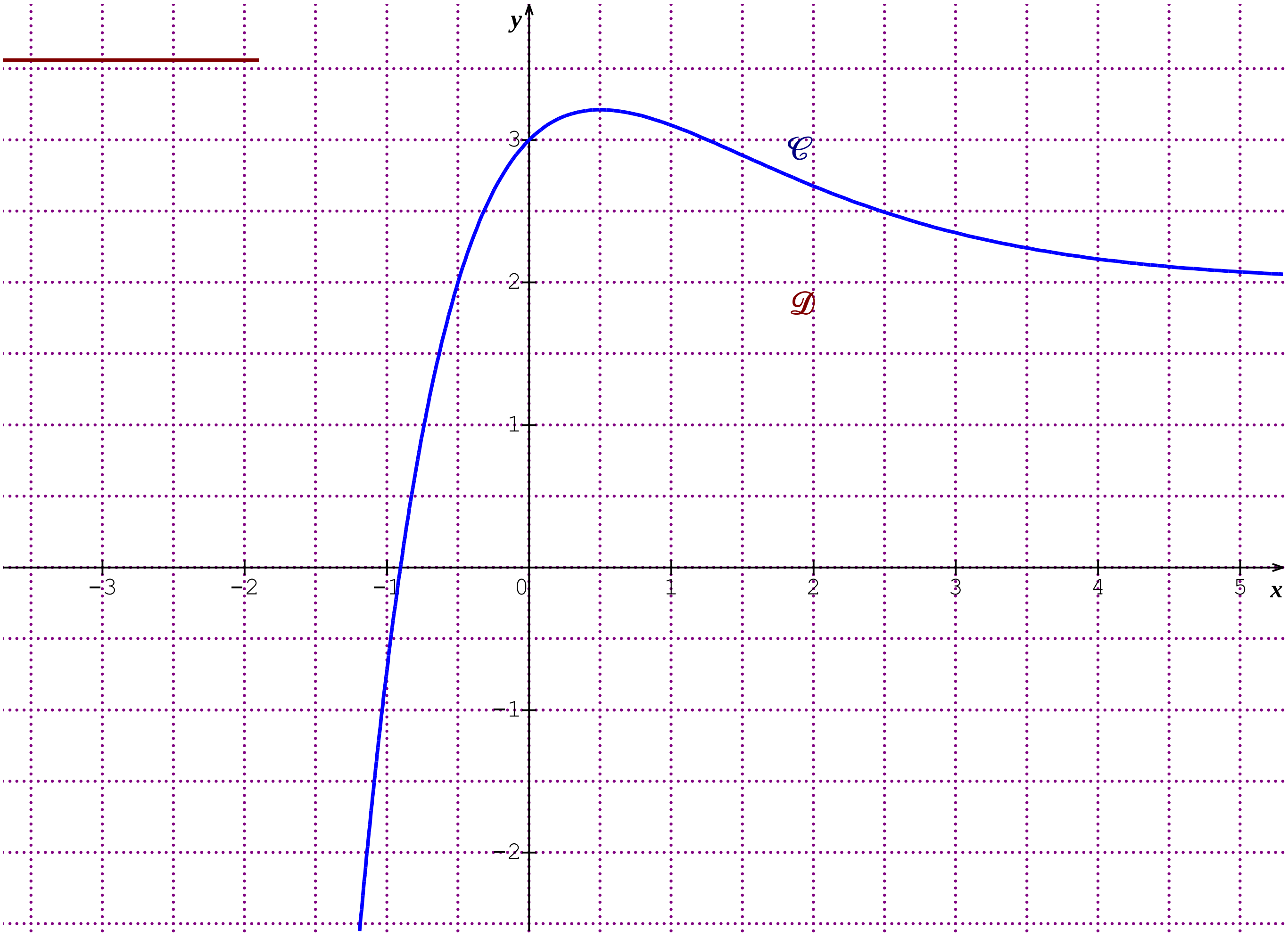
Par ailleurs on sait que $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$

Donc, par addition : $\lim_{x\to+\infty}\left(2x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}+2\right)=2$

Donc : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=2}$

b) D'après ce qui précède, on peut en déduire que la courbe $\mathscr{C}$ admet pour asymptote la droite $\mathscr{D}$ d'équation $\boxed{y=2}$.

c) Tracer $\mathscr{D}$ sur le graphique fourni en annexe.



3. On appelle f' la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=(1-2x)\mathrm{e}^{-x}$

Posons $\begin{cases}u(x)=2x+1\\ v(x)=\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$ On déduit : $\begin{cases}u'(x)=2\\ v'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$

On sait que $(uv)'=u'v+uv'$ donc $f'(x)=2\mathrm{e}^{-x}+(2x+1)\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)$

donc : $f'(x)=2\mathrm{e}^{-x}-2x\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x}$

donc : $f'(x)=(2-2x-1)\mathrm{e}^{-x}$

Finalement, on a bien : $\boxed{f'(x)=(1-2x)\mathrm{e}^{-x}}$

b) Étude des variations de f. Tableau de variation.

Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^{-x}>0$.

Donc $f'(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow 1-2x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant \frac{1}{2}$

La fonction f est donc croissante sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	2

On a : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{1}{2}} + 2 = \dfrac{2}{\sqrt{e}} + 2 \approx 3{,}21$.

4. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (-2x-3)e^{-x} + 2x$.

a) Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Il suffit de démontrer que $F' = f$.

Posons $\begin{cases} u(x) = -2x-3 \\ v(x) = e^{-x} \end{cases}$ et donc $\begin{cases} u'(x) = -2 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$.

On déduit :

$$F'(x) = -2e^{-x} + (-2x-3)\left(-e^{-x}\right) + 2$$
$$F'(x) = -2e^{-x} + 2xe^{-x} + 3e^{-x} + 2$$
$$F'(x) = (2x+1)e^{-x} + 2$$
$$F'(x) = f(x).$$

La fonction F est donc bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calcul d'aire.

Sur l'intervalle [0 ; 2], la fonction f est positive.

Donc l'aire est donnée par : $A = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ unités d'aire.

Or l'unité d'aire vaut 4 cm^2.

Donc :

$$A = 4 \times \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$$
$$A = 4 \times (F(2) - F(0))$$
$$A = 4 \times \left[\left(-7e^{-2} + 4\right) - (-3)\right]$$
$$A = 4 \times \left(7 - 7e^{-2}\right)$$
$$\boxed{A = 28\left(1 - e^{-2}\right)}$$
$$\boxed{A \approx 24{,}21 \text{ cm}^2}$$

Exercice 2 (9 points)

Partie A

Un disque est conforme si son diamètre, exprimé en mm, appartient à l'intervalle [237,18 ; 238,82].

Le diamètre X d'un disque suit la loi normale $\mathcal{N}(238 ; 0{,}4)$.

Quelle est la probabilité qu'un disque pris au hasard soit conforme ?

Posons $T = \dfrac{X - 238}{0{,}4}$. Ainsi, T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

On a :

$$p(237{,}18 \leqslant X \leqslant 238{,}82) = p\left(\frac{237{,}18 - 238}{0{,}4} \leqslant \frac{X-238}{0{,}4} \leqslant \frac{238{,}82 - 238}{0{,}4}\right)$$
$$= p\left(-\frac{0{,}82}{0{,}4} \leqslant T \leqslant \frac{0{,}82}{0{,}4}\right)$$
$$= p(-2{,}05 \leqslant T \leqslant 2{,}05)$$

$= 2\Pi(2{,}05) - 1$ où Π est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

$= 2 \times 0{,}9798 - 1$ par lecture de la table de Π.

$= 0{,}9596$

$\boxed{\text{Donc la probabilité qu'un disque pris au hasard soit de diamètre conforme est } 0{,}960}$

Partie B

1. Justifier que Y_1 suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres

   Le prélèvement des 50 disques dans le stock est assimilable à un tirage avec remise.

   L'expérience est donc une suite de 50 épreuves de Bernoulli indépendantes avec, pour chaque tirage, 2 issues :

   - succès (le disque est non-conforme) avec une probabilité de 0,04,
   - échec (le disque est conforme) avec une probabilité de 0,96

   Donc la variable Y_1 qui compte le nombre de disques non-conformes dans ce tirage de 50 disques suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}04$: $\mathscr{B}(50\,;\,0{,}04)$.

2. Calculer la probabilité que les 50 disques d'un lot aient tous un diamètre conforme.

   $\boxed{p(Y_1 = 0) = 0{,}96^{50} \approx 0{,}130}$

3. On décide d'approcher Y_1 par Y_2 qui suit une loi de Poisson de paramètre λ.

   a) Justifier que $\lambda = 2$.

   L'espérance de Y_2 (donnée par λ) est la même que celle de Y_1.

   On sait que l'espérance d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$ est np.

   Donc l'espérance de Y_1 est $E(Y_1) = 50 \times 0{,}04 = 2$

   Donc l'espérance de Y_2 est $\boxed{\lambda = 2}$

   b) Calculer la probabilité que le lot prélevé ait au plus 3 disques non-conformes pour leur diamètre.

   $P(Y_2 \leqslant 3) = \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^3}{3!}\right)\mathrm{e}^{-\lambda}$

   Donc, en prenant $\lambda = 2$: $p(Y2 \leqslant 3) = \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3}\right)\mathrm{e}^{-2} = \frac{19}{3}\mathrm{e}^{-2}$, soit $\boxed{p(Y_2 \leqslant 3) \approx 0{,}857}$

Partie C : Test de validité d'hypothèse

1. Quelle est l'hypothèse alternative ?

   L'hypothèse nulle étant H_0 : « $\mu = 238$ », et le test étant bilatéral, l'hypothèse alternative est : $\boxed{H_1 : \text{« } \mu \neq 238 \text{ »}}$

2. Déterminer le réel h tel que $P(238 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 238 + h) = 0{,}95$

   La variable $\overline{Z}$ suit la loi normale $\mathscr{N}(238\,;\,0{,}06)$. (l'écart type est 0,06 car $\frac{0{,}4}{\sqrt{45}} \approx 0{,}06$, mais ce n'était pas demandé)

   Posons $T = \frac{\overline{Z} - 238}{0{,}06}$. On sait qu'alors, la variable T suit la loi normale centrée réduite $\mathscr{N}(0\,;\,1)$.

   On déduit :

$$
\begin{aligned}
P(238 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 238 + h) = 0{,}95 \quad &\Leftrightarrow \quad P\left(-\frac{h}{0{,}06} \leqslant T \leqslant \frac{h}{0{,}06}\right) = 0{,}95 \\
&\Leftrightarrow \quad 2\Pi\left(\frac{h}{0{,}06}\right) - 1 = 0{,}95 \\
&\Leftrightarrow \quad \Pi\left(\frac{h}{0{,}06}\right) = 0{,}975 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{h}{0{,}06} = 1{,}96 \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{h \approx 0{,}118}
\end{aligned}
$$

3. Énoncer la règle de décision du test.

   L'intervalle d'acceptabilité est $[238 - 0{,}118\,;\,238 + 0{,}118] = [237{,}882\,;\,238{,}118]$

   Si le client prélève un échantillon de 45 disques dont le diamètre moyen est en dehors de l'intervalle d'acceptabilité (zone critique) alors il devra en conclure que la moyenne des disques de la livraison n'est pas 238 mm (il devra refuser l'hypothèse H_0 et accepter l'hypothèse H_1). Dans le cas contraire, il devra accepter H_0 et refuser H_1.

4. Dans son échantillon, le diamètre moyen des disques n'est pas dans la zone critique et on peut donc conclure, au risque de 5 %, que $\boxed{\text{la moyenne des disques de la livraison est bien de 238 mm.}}$